16/10/2018

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί - πίνακες

Γραμμοπράξεις
- α) $\Gamma_\nu \leftrightarrow \Gamma_\mu$
- β) $\alpha\Gamma_\nu$
- γ) $\Gamma_\nu \mapsto \Gamma_\nu + \alpha\Gamma_\mu$

$E_{ij} = E_{ij}^{-1}$

$M_i(\alpha) \quad M_i(\alpha)^{-1} = M_i(\frac{1}{\alpha})$

$A_{ij}(\alpha) \quad A_{ij}(\alpha)^{-1} = A_{ij}(-\alpha)$

Αν εφαρμόσουμε στοιχειώδεις γραμμοπράξεις, καταλήγουμε στον κλιμακωτό και μετά ανηγμένο κλιμακωτό.

Δύο πίνακες καλούνται γραμμοϊσοδύναμοι αν ο ένας προέρχεται από τον άλλο με στοιχ. πράξεις.

Θεώρημα: Κάθε πίνακας είναι ισοδύναμος με κάποιον ανηγμένο κλιμακωτό.

Αν ο A είναι $n \times n$ τότε ο ιδεώδης ανηγμένος κλιμακωτός είναι ο $I_{n\times n}$.

Κάθε στοιχειώδης γραμμοπράξη δίνεται από το γινόμενο του αντίστοιχου πίνακα.

Θεώρημα: Κάθε πίνακας A γράφεται στην μορφή

$$R = E_k \quad E_1 A$$

με τον R να είναι ανηγμένος κλιμακωτός και οι E_i είναι στοιχ. πίνακες.

Αν $\mathbb{R} = I_{n\times n} = \underbrace{E_k \cdot \ldots \cdot E_1}_{A^{-1}} \cdot A$

Πρόταση Αν ο A έχει αντίστροφο τότε αυτός είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Παρατήρηση $\mathbb{R} = E_k \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$ $\quad E_i$ στοιχειώδεις πίνακες, άρα είναι Αντιστρέψιμοι.

$$E_k^{-1} \cdot \ldots \cdot E_{k-1}^{-1}\,\mathbb{R} = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot \cancel{E_{k-1}}\,\cancel{E_k^{-1}}\,\cancel{E_k} \ldots \cancel{E_1}\,A$$

$$\underbrace{E_1^{-1} \ldots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}}_{\text{στοιχ. πίνακες}}\,\mathbb{R} = A$$

Πόρισμα. Ο τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν ο ανηγμένος κλιμακωτός του είναι ο ταυτοτικός.

Π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ Να βρεθεί ο ανηγμένος κλιμακωτός.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & +2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftarrow \frac{1}{2}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2}$$

Scanned by CamScanner

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto -\frac{2}{7}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_1 - \frac{3}{2}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{3}{14} & \frac{1}{2}-\frac{9}{14} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{14}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right) (+) \Leftarrow A^{-1}$$

$$I = A_{23}\left(-\tfrac{1}{2}\right) A_{13}\left(-\tfrac{3}{2}\right) A_{12}(1) M_3\left(-\tfrac{2}{7}\right) A_{32}(-3) M_2 A_{31}(-1) A_{21}(-1) A \quad (++)$$

Εφαρμογή στα γραμμικά συστήματα

Π.χ. Να λυθεί το επόμενο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad AX = b$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

ομογενές σύστημα επειδή $(0,0,0)$ λύση.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Είναι αντιστρέψιμος;
Ναι ο A^{-1} είναι ο Θή (++)

Άρα $AX = 6 \Rightarrow A^{-1} \cdot AX = A^{-1}6$

$X = A^{-1} \cdot 6 = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Μοναδική λύση.

π.χ. Να βρεθεί το κ ώστε το σύστημα να έχει λύση

$2x_1 + x_2 = 5$
$x_1 \quad -3x_2 = -1$
$3x_1 \quad +4x_2 = k$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 3 & 4 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 13 & k+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to 1/7\,\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 13 & k+3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_3 - 13\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-10 \end{pmatrix} \quad k \neq 10 \quad \Gamma_3 \leftrightarrow \frac{1}{k-10}\Gamma_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (++)$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το (++)

$x_1 - 3x_2 = -1$

$x_2 = 1$

$0 = 1$ Αδύνατο $\boxed{k \neq 10}$

Για να έχει λύση το σύστημα που αφήνει να μην έχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία γραμμή

Scanned by CamScanner